

LOGICA LUDUS

Jaroslav Peregrin, FLÚ AV ČR a FF UK, Praha
www.cuni.cz/~peregrin

Vymezení logického kalkulu, či vymezení nějaké teorie vyjádřené v jeho rámci se obvykle skládá ze tří součástí:

- (1) Syntaktická součást vymezuje, co je výrokem (a obecněji výrazem) jazyka, který stojí v základě tohoto kalkulu;
- (2) Axiomatická součást vymezuje, který výrok je správně odvoditelný ze kterých jiných výroků (a tím i které výroky jsou teoremy daného kalkulu); a
- (3) sémantická součást vymezuje, jaký má který výraz denotát a zda, či relativně k jaké interpretaci je který výrok pravdivý (a tím i které výroky jsou tautologiemi tohoto kalkulu¹).

V případě kalkulu tzv. klasické logiky (klasického predikátového počtu 1. řádu; PP1) je toto vymezení následující²:

- (1) Výrokem je kombinace n -árního predikátu s n individuových konstant (jmen) nebo proměnnými a cokoli, co vznikne z výroků s použitím logických spojek (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow) a kvantifikátorů (\exists , \forall).
- (2) Teorémem je každý výrok, který má tvar daný seznamem axiomů (který může být například následující: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$; $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$; $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$; $\forall x A \rightarrow A$; $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, kde x není volnou proměnnou A); a teorémem je také každý výrok, který je odvozen z teorémů pomocí daných odvozovacích pravidel (kterými jsou odvození B z A a $A \rightarrow B$ a odvození $\forall x A$ z A);
- (3) Tautologií je každý výrok, který je pravdivý při každé interpretaci svých omdovoduvých konstant a predikátů. Interpretací se přitom rozumí funkce, přiřazující konstantám prvky nějakého univerza diskurzu a n -árním predikátům n -ární relace (množiny uspořádaných n -tic) nad tímto univerzem; a pravdivost výroku pro danou interpretaci je definována víceméně zřejmým způsobem (který je podrobněji rozveden níže).

Obvykle se pak má za to, že v důsledku faktu, že výraz se obecně stává smysluplným tím, že zastupuje nějaký denotát, je tou nejzásadnější komponentou sémantika; a že axiomatika je jenom naším ('pomocným') nástrojem zachycení sémantického vztahu vyplývání.

Na celou situaci se však můžeme dívat i obráceně. Můžeme si povšimnout, že výrazy se stávají smysluplnými tím, že jsou jim přidělovány určité role v rámci našich 'jazykových her' (Wittgenstein, 1953); a na denotáty se tak začít dívat spíše jako na ('pomocná') zhmotnění těchto rolí. A protože hrou, která má z hlediska konstituce smysluplnosti ústřední roli, se zdá být ta, kterou Brandom (1994) nazývá *hrou na udávání a požadování důvodů*, jsou pak z hlediska významu zásadní zejména *odvozovací* čili *inferenční* pravidla. Argumenty pro toto na první pohled možná ne zcela intuitivní stanovisko jsem předkládal na jiném místě (Peregrin, 1999).

¹ Přičemž tautologie (to jest 'sémanticky nutné' výroky by se měly krýt s teoremami, to jest s 'axiomaticky nutnými' výroky. To bývá předmětem (často velice komplikovaných) *důkazů úplnosti* logických kalkulů.

² Přesněji viz Peregrin (2004) nebo jakákoli jiná učebnice logiky.

Z tohoto pohledu (i když jistě ne jenom z něj) je mimořádně zajímavý nedávný vývoj v logice: tam se totiž do centra pozornosti dostávají souvislosti mezi logikou a teorií her a logické kalkuly začínají být nahlíženy jako prostředky vymezení určitých pravidel, v jejichž rámci pak hrajeme jisté ('odůvodňovací') hry, reprezentovatelné výroky příslušných kalkulů. Předvedme si dvě varianty takového 'herního' přístupu k logice.

Hry proti Přírodě

Jednou z těchto variant *herní sémantiky* uvedl na scénu v sedmdesátých letech XX. století finský logik a filosof Jaako Hintikka (viz např. Hintikka, 1973; či Saarinen, 1978). Jeho přístup je založen na faktu, že běžnou denotační sémantiku pro standardní logiku můžeme přeformulovat právě prostřednictvím her: každému výroku je pak přiřazena určitá hra (mezi dvěma hráči, kterým se obvykle říká *Já* a *Příroda*) tak, že v případě, že je příslušný výrok pravdivý, má v této hře vítěznou strategii první z nich, zatímco je-li nepravdivá, má vítěznou strategii ten druhý.

Pro PP1 vypadají tyto hry ve srovnání s tradiční definicí následujícím způsobem:

<u>tradiční definice pravdivosti výroků PP1</u>	<u>definice výroků PP1 chápaných jako hry</u>
$R(i_1, \dots, i_n)$ je pravdivý, jsou-li předměty denotované i_1, \dots, i_n v relaci vyjadřované R	ve hře $R(i_1, \dots, i_n)$ vítězím <i>Já</i> , jsou-li předměty denotované i_1, \dots, i_n v relaci vyjadřované R , jinak vítězí <i>Příroda</i>
$\neg A$ je pravdivý právě tehdy, když je A nepravdivý	hra $\neg A$ probíhá tak, že si nejprve <i>Já</i> a <i>Příroda</i> vyměníme role, a pak se hraje hra A
$A \wedge B$ je pravdivý právě tehdy, když jsou pravdivé A a B	hra $A \wedge B$ probíhá tak, že <i>Příroda</i> vybere jednu z her A a B a hraje se ta
$A \vee B$ je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý A nebo je pravdivý B	hra $A \vee B$ probíhá tak, že <i>Já</i> vyberu jednu z her A a B a hraje se ta
$\exists x A[x]$ je pravdivý právě tehdy, když existuje prvek i univerza takový, že je výrok $A(i)$ pravdivý	hra $\exists x A[x]$ probíhá tak, že <i>Já</i> zvolím prvek i univerza a hraje se hra $A(i)$
$\forall x A[x]$ je pravdivý právě tehdy, když je výrok $A(i)$ pravdivý pro každý prvek i univerza	hra $\forall x A[x]$ probíhá tak, že <i>Příroda</i> zvolí prvek i univerza a hraje se hra $A(i)$

Vezměme jako příklad výrok tvaru $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$, neboli, což je v klasické logice totéž, $A \vee \neg(A \vee \neg(B \vee \neg A))$. Jak by probíhala příslušná hra a dokázal bych ji vždy vyhrát?

1. Protože tento výrok je disjunkcí výroků A a $\neg(A \vee \neg(B \vee \neg A))$, jsem podle pravidla pro disjunkci na tahu já a musím vybrat jeden z disjunktů, se kterým má hra pokračovat. Rozlišme dva případy: Je-li výrok A pravdivý, vyberu samozřejmě jej; a mám vyhráno. Předpokládejme

tedy, že A pravdivý není – v tom případě vyberu $\neg(A \vee \neg(B \vee \neg A))$. (Poznamenejme, že já samozřejmě nemusím vědět, zda je A pravdivý, a tak mohu zvolit špatně a prohrát, přestože mám vítěznou strategii. Nám ale nejde o to, zda dovedu svou vítěznou strategii použít, jde pouze o to, zda existuje.)

2. Protože teď stojíme před výrokem, který je negací, vymění se podle pravidla pro negaci role a pokračuje se s výrokem $A \vee \neg(B \vee \neg A)$.

3. To je opět disjunkce, takže bych opět já měl volit jeden s disjunktů; avšak protože role jsou vyměněny, je volba na Přírodě. Příroda tedy vybírá jeden z výroků A a $\neg(B \vee \neg A)$. Pokud vybere ten první, prohraje (stále totiž trvá předpoklad, že A je nepravdivý); takže předpokládejme, že vybere ten druhý.

4. Role se opět vymění (takže se vrátí k normálu) a pokračuje se s výrokem $B \vee \neg A$.

5. Já vybírám jeden z výroků B a $\neg A$; a vyberu ten druhý.

6. Role se vymění a pokračuje se s výrokem A .

7. Na tahu je tedy Příroda, a protože A je podle předpokladu nepravdivý, prohrává.

Mám tedy vítěznou strategii, jak hru spojenou s výrokem tohoto tvaru vždy vyhrát – takový výrok je tedy pravdivý pro jakékoli A a B . A výrok tohoto tvaru je vskutku teorémem klasické logiky (říká se mu Peircův zákon).

Sémantice, kterou jsme právě popsali pro PP1, se v anglicky psané literatuře obvykle říká *game-theoretical semantics*. Hintikka na jejím základě později vybudoval tzv. *logiku vstřícnou nezávislosti* (*independence friendly logic* - viz např. Hintikka, 1996), která je založena na tom, že se kalkul PP1 obohatí o výroky, kterým odpovídají jisté 'méně standardní' hry než jsou ty, které odpovídají výrokům PP1³. Tato logika je v současné době předmětem intenzivních sporů a bádání.

Hry mezi účastníky diskurzu

S poněkud jinou koncepcí her v rámci logiky přišel již před Hintikkou německý logik Paul Lorenzen a jeho škola. Ti ve své tzv. *dialogické logice* (viz Lorenzen & Schwemmer, 1975) viděli zejména prostředek, jak vysvětlit sémantiku logických konstant; jejich hry totiž podle nich zachycují základní sémantické operace, kterými jsou tyto konstanty charakterizovány. Až do současného revivalu herních sémantik však jejich přístup nebyl příliš akceptován mimo německou jazykovou oblast.

V tomto případě nejde o virtuální hry člověka proti přírodě, ale o hry mezi účastníky diskurzu, to jest o něco, co je idealizací faktických argumentativních praktik. Argumentativní diskurz je viděn jako předkládání, zpochybňování a bránění tezí. Proponent něco tvrdí a oponent se to pokouší zpochybnit, což činí tak, že tvrzený výrok nebo nějaké jeho části napadá. V rámci toho sám může činit určitá tvrzení, která může zase zpochybňovat proponent. Proponent vítězí, ubrání-li se všem útokům a nemá-li oponent již žádný způsob, jak ho napadnout.

Pro výroky PP1 můžeme pravidla zpochybňování a obhajování formulovat následujícím způsobem:

³ Viz o tom Peregrin (2000).

<u>Typ výroku</u>	<u>Možné způsoby napadení</u>	<u>Obrana proti těmto způsobům napadení</u>
$A \wedge B$	napadení A	tvrzení A
	napadení B	tvrzení B
$A \vee B$	napadení	tvrzení A nebo tvrzení B
$\neg A$	tvrzení A	žádná
$A \rightarrow B$	tvrzení A	tvrzení B
$\exists x A[x]$	napadení	tvrzení $A[i]$
$\forall x A[x]$	napadení $A[i]$	tvrzení $A[i]$

Hry v rámci dialogické logiky potom podléhají ještě dalším typům omezení, která se nekýkají jednotlivých typů výroků, ale celkové struktury hry. Standardně jde o tato omezení

(a)	Proponent může tvrdit atomickou formuli až poté, co ji tvrdil oponent.
(b)	Bránit se lze pouze proti <i>poslednímu</i> útoku.
(c)	Na útok lze odpovídat pouze jednou.
(d)	Tvrzení proponenta může být napadnuto pouze jednou.

V takto vymezené hře prohrává ten, kdo už nemůže udělat žádný legitimní tah.

Vezměme nyní znovu náš příklad $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. (Tento výrok *není* z hlediska tohoto typu her ekvivalentní výroku $A \vee \neg(A \vee \neg(B \vee \neg A))$ – což naznačuje, že se odchylujeme od klasické logiky.) Nyní by hra probíhala následujícím způsobem:

1. Proponent tvrdí $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$.
2. Oponent ho napadá tak, že tvrdí $(A \rightarrow B) \rightarrow A$.
3. Proponent se nemůže bránit, protože to by musel tvrdit atomický výrok A , což by bylo v rozporu s pravidlem (a); může však přejít do protiútoků a napadnout tvrzení oponenta. Tvrdí tedy $A \rightarrow B$.
4. Kdyby se oponent nyní bránil tvrzením A , mohl by toho proponent využít k tomu, aby toto tvrzení zopakoval a tím se (opožděně, ale přece) bránil proti útoku 2.; oponent tedy přechází do protiútoků, což je shodou okolností opět tvrzení A .
5. Tím je proponent v koncích, protože obrana by znamenala tvrzení B , což vzhledem k (a) nemůže. Nemůže se ovšem už ani tvrzením A bránit před útokem 2., protože to by nyní už bylo v rozporu s pravidlem (b). Proponent tedy již nemá žádný tah a prohrává.

V tomto případě, na rozdíl od toho předchozího, tedy proponent *nemá* vítěznou strategii. To znamená, že výroky, pro které existuje proponentova vítězná strategie pro tento typ her, se nekryjí s teorémy klasické logiky. Co je pozoruhodné, je to, že, jak se ukazuje, za těchto okolností má proponent vítěznou strategii tehdy, když je předkládaná teze teorémem nikoli

klasické, ale *intuicionistické* logiky⁴. (Všimněme si ovšem, že zpět ke klasické logice se můžeme dostat tak, že zrušíme některá z uvedených omezení. Jak jsme například viděli, zrušíme-li (b), proponent už vítěznou strategii mít bude.)

'Požadování a udávání důvodů'

Je nesporné, že propojení logiky a teorie her vede jak k některým zajímavým matematickým výsledkům, tak k lepšímu pochopení vlastností logických kalkulů. Může však vést i k lepšímu pochopení toho, jak funguje náš jazyk?

Důvod, proč Wittgenstein obrátil pozornost filosofů jazyka k pojmu *jazyková hra*, byl ten, že měl pocit, že naše dogmatické přesvědčení, že jazyk slouží něčemu takovému jako 'předávání myšlenek nebo informací', nám zabraňuje vidět fakt, že funkce jazyka jsou ve skutečnosti mnohem různorodější a mnohem komplikovanější. Wittgenstein nás vyzývá, abychom si představili zárodečnou jazykovou hru, v jejímž rámci zedník volá na přidavače názvy různých druhů cihel a tvárnic a ten mu je podle toho přináší:

Tento jazyk má sloužit k dorozumívání mezi stavařem *A* a jeho pomocníkem *B*. *A* tvoří stavbu ze stavebních kamenů; k mání jsou kostky, sloupky, desky a trámy. *B* mu má ty stavební kameny dodávat, a sice v tom pořadí, v jakém je *A* potřebuje. K tomuto účelu používají jazyk, sestávající ze slov "Kostka", "Sloupek", "Deska" a "Trám". *A* je vyvolává; a *B* přináší ten kámen, o kterém se naučil, že ho má na toto zvolání přinést. (1953, §2)

Wittgenstein poukazuje na to, že chceme-li u takového 'jazyka' hovořit o smyslu používaných výrazů, pak jim může být stěží něco jiného než *role* těchto výrazů v rámci příslušné 'jazykové hry': objasnit smysl výrazu "Kostka" lze stěží jinak, než tak, že řekneme, že je to prostředek, jak přimět pomocníka, aby podal kostku. V rámci takové hry jsou tedy slova nejprůmočařeji nahlédnutelná jako *nástroje*, kterými může jejich uživatel něčeho *dosáhnout*. Současně Wittgenstein poukazuje na to, že náš plnohodnotný jazyk se od tohoto druhu 'jazyka' odlišuje spíše jenom *kvantitativně* než *kvalitativně* - 'hry', které my se svým jazykem hrajeme, jsou sice samozřejmě nesrovnatelně komplikovanější, dívat se na význam slova jako na jeho *funkci* však podle něj přesto zůstává na místě.

Avšak přijmeme-li tento pohled na jazyk jako především prostředek různého druhu aktivit ('her'), můžeme se dále ptát: není tu přece jenom něco, co činí ten náš skutečný jazyk v nějakém smyslu *kvalitativně* odlišným od 'jazyků' jiných živočichů či od 'jazyka' Wittgensteinova stavaře a jeho pomocníka? Jednou ze zásadních věcí, které charakteristicky vyznačují ten náš jazyk, je ovšem to, že s ním nejenom můžeme něčeho prakticky dosáhnout, ale že jím můžeme artikulovat i *teoretické vědění* – díky němu máme nikoli jenom *know-how*, ale i *know-that*. A teoretické vědění je nerozborně spjaté s *argumentací*, kterou můžeme opět vidět jako jistý druh 'jazykové hry', totiž jako onu hru na požadování a udávání důvodů, o které jsme se zmínili výše.

Tato hra je konstituována akty *tvrzení* (se kterým je spojen závazek opodstatnění) a *zpochybnění* (které se rovná požadavku na opodstatnění). A protože tvrzení je důvodem jiného tvrzení zřejmě tehdy, když pravdivost toho prvního zaručuje pravdivost toho druhého,

⁴ Ta se od klasické liší odmítnutím některých teoremů, které klasická logika přijímá, zejména *zákona vyloučení třetího*, tj. $A \vee \neg A$. Viz Peregrin (2004).

zdá se, že důležité poznatky o charakteristické povaze jazyka můžeme získat i z logických výzkumů *vyplývání* a tedy *správné odvoditelnosti*; a také z herního pojetí logiky. Výklad povahy jazyka opírající se o pojem *odvození (inference)* dovedli do podoby ucelené filosofické koncepce, opírající se zejména o pojetí jazyka jakožto média hry na požadování a udávání důvodů, zejména američtí filosofové Wilfrid Sellars a Robert Brandom (*viz* zejména Sellars, 1992; Brandom, 1994)⁵.

Literatura

- Brandom, R. (1994): *Making It Explicit*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
- Hintikka, J. (1973): *Logic, Language-Games and Information*, Clarendon Press, Oxford.
- Hintikka, J. (1996): *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lorenzen, P. & Schwemmer, O. (1975): *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Peregrin, J. (1999): *Význam a struktura*, OIKOYMENH, Praha; přepracovaná anglická verze *Meaning and structure*, Ashgate, Aldershot, 2001.
- Peregrin, J. (2000): 'Pozoruhodné logické systémy I', *ORGANON F* 8, 90-96.
- Peregrin, J. (2004): *Logika a logiky*, Academia, Praha.
- Saarinen, E., ed. (1978): *Game-Theoretical Semantics*, Reidel, Dordrecht, 367-379.
- Sellars, W. (1992): *Science and Metaphysics*, Ridgeview, Atascadero.
- Wittgenstein, L. (1953): *Philosophische Untersuchungen*, Blackwell, Oxford; English translation *Philosophical Investigation*, Blackwell, Oxford, 1953 český překlad FLÚ AV ČR, Praha, 1993.

⁵ Podrobněji o tom viz Peregrin (1999).