Co člověk potřebuje, když potřebuje "logiku vyššího řádu"?

Jaroslav Peregrin[1]

www.cuni.cz/~peregrin

Predikátový počet prvního řádu

Formální jazyky, které jsou médiem moderní formální logiky, se postupně konstituovaly v první polovině našeho století. Ten nejpodstatnější z nich, jazyk *predikátového počtu*, je charakterizován třemi typy syntaktických pravidel - první dva z nich přímočaře kopírují základní syntaktické struktury přirozeného jazyka, totiž jednak to, že jednoduchá věta přirozeného jazyka se v typickém případě skládá ze slovesné fráze doplněné několika frázemi jmennými, a jednak to, že věty mohou být negovány a pomocí spojek spojovány v souvětí:

(i): N-ární predikát plus n termů (kde termem může být buďto konstanta, tj. "jméno", nebo aplikace n-árního funktoru na n termů, tj. "deskripce") dává (jednoduchý) výrok.

(ii) N-ární logický operátor plus n výroků dává (složený) výrok.

Třetí typ pravidla je jiného typu: nereflektuje žádnou takto obecnou syntaktickou strukturu přirozeného jazyka, ale spíše strukturu určitých specifických výroků, které můžeme činit *o jazyce*. Uděláme-li z nějakého výrazu "matrici" (obecné schéma) tak, že v něm některé části nahradíme *proměnnými* (tj. výrazy, které jsou pouze formální a ve skutečnosti jenom indikují "prázdní místa"), můžeme si pod těmito parametry představovat různé konkrétní věci a zkoumat, v kterých případech by tak vzniklý výrok platil, a v kterých ne. Na základě toho můžeme formulovat tvrzení jako "matrice M dá pravdivý výrok, ať si pod proměnnou x představíme cokoli" a "pod proměnnou x si lze něco představit tak, aby M dala pravdivý výrok"; či prostě "pro každé x platí M" a "pro nějaké x platí M". To vede k intuici (na rozdíl od těch předchozích dvou velice specifické), že výrok se může skládat z kvantifikátoru (stanovícího, zda hovoříme o všech možnostech či o existenci alespoň jedné možnosti), proměnné (stanovící kterého symbolu se úvaha o týká) a z matrice:

(iii) Kvantifikátor plus proměnná plus výrok dá výrok (přičemž se předpokládá, že proměnné patří mezi symboly, které mohou legitimně vstupovat do pravidla (i)).

Tato poslední intuice ovšem nebyla vždy chápána a explikována zcela jednotně: různily se především názory na to, zda proměnnými můžeme nahrazovat jenom termy, nebo i predikáty.

[1]Autor děkuje V. Švejdarovi, P.Kolářovi a P.Maternovi za podnětné připomínky k dřívější verzi rukopisu.

Tato víceznačnost vedla k tomu, že se v první polovině našeho století z predikátového počtu začal vydělovat predikátový počet *prvního řádu*, charakterizovaný tím, že v něm nelze kvantifikovat přes predikáty[2]. To především znamená, že v něm existují jenom takové proměnné, které zastupují termy; znamená to ale i to, že jsou v něm zapovězeny veškeré mechanismy, které by takovou kvantifikaci umožňovaly jakkoli nepřímo.[3] Takto vymezený predikátový počet prvního řádu má některé charakteristické vlastnosti, které predikátový počet pojatý šířeji obecně postrádá: je (*sémanticky*) *úplný* (výrok je dokazatelný právě když je platný ve všech modelech); je *kompaktní* (každá sporná množina výroků obsahuje *konečnou* spornou podmnožinu); a má tzv. *Löwenheimovu-Skolemovu vlastnost* (každá množina výroků, která má model, má nejvýše spočetný model). Tyto vlastnosti, které jsou obvykle považovány za žádoucí, jsou také hlavním důvodem, proč je tolik (především matematických) logiků přesvědčeno, že by se měla logická teorie soustředit pouze na tento systém.

Vedle exponentů logiky prvního řádu je ovšem i dost těch, kteří tuto logiku vidí jako příliš restriktivní. Takové hlasy se přitom ozývají nejen od logiků, kterým jde především o analýzu přirozeného jazyka (a pro které je zásadní bohatý repertoár syntaktických prostředků, ale i od těch, kterým jde o základy matematiky (Bairwise a Feferman, 1985; Shapiro, 1991). Domníváme se však, že diskuse, která se na toto téma (na různých úrovních) odehrávají, někdy trpí jednak tím, že si jejich účastnící zcela neuvědomují všechna fakta o vztahu mezi logikou řádu prvního a logikami řádů vyšších, a pak především tím, že se termíny jako *logika vyššího řádu* užívají v poněkud různých smyslech.

Cílem tohoto článku je nyní především vyjasnit, co je a co není legitimním předmětem takových sporů: nepřináší tedy nic zásadně nového, ale shrnuje dostupná relevantní fakta způsobem, který autor považuje za potřebný a který dosud v literatuře postrádá.

Za hranicemi logiky prvního řádu

Zeptáme-li se někoho, kdo obhajuje potřebu logiky vyššího než prvního řádu, proč nevystačí s logikou řádu prvního, dostaneme nejčastěji odpověď v tom smyslu, že potřebuje *větší vyjadřovací schopnost*, než jakou má logika prvního řádu. To ale může znamenat poněkud odlišné věci. Může to především znamenat (i) potřebu syntakticky bohatšího jazyka; což může dále znamenat (i.i) prostou potřebu predikátů vyšších řádů; či (i.ii) potřebu kvantifikovat přes příslušné proměnné. Může to ale také znamenat (ii) potřebu logiky, který nám dovolí vyjádřit

[2]Proces tohoto vydělování podrobně popisuje a dokumentuje Moore (1988).

[3]Takovým mechanismem by mohlo být například nějaké pravidlo komprehenze, které by zajistilo, že by měl každý predikát v univerzu svůj jednoznačný "objektuální korelát": pak by totiž šlo fakticky přes predikáty kvantifikovat prostřednictvím kvantifikování přes jejich objektuální koreláty. Právě díky tomuto mechanismu nebyla první soustavná formulace predikátového počtu, kterou předložil Gottlob Frege, ve své podstatě logikou prvního řádu. (Fregův systém byl ovšem díky neomezené komoprehenzi, jak na to upozornil Russell, *sporný* - viz předchozí studie.)

některé pojmy, které ně jsou vyjádřitelné v logice prvního řádu, například pojem konečnosti. Tyto motivy, jakkoli spolu úzce souvisejí, nejsou zcela ztotožnitelné. Rozeberme je podrobněji.

Potřeba (i.i) může být motivována snahou o přímočarou logickou analýzu výroků jako jsou (1) či (2); abychom totiž mohli vytvořit formuli (1'), potřebujeme predikát druhého řádu **Do** a abychom mohli vytvořit (2'), potřebujeme "predikát" **Ry**, jehož aplikací na predikát vznikne opět predikát.

Být statečný je dobré (1)
Karel rychle běží (2)
$\mathbf{Do}(\mathbf{St})$ (1')
$(\mathbf{Ry}(\mathbf{Be}))(\mathbf{Ka})$ (2')

Podobně můžeme chtít zachytit některé matematické pojmy prostřednictvím predikátů druhého řádu; tak například můžeme chtít schematizovat (3) jako (3'), kde **Prv** je unární predikát.

Prvočísel je nekonečně mnoho (3)
$\mathbf{Nek}(\mathbf{Prv})$ (3')

Potřeba (i.ii) může být motivována snahou o zachycení výroků jako (4) a (5) formou (4') a (5'):

Karel a Petr mají nějakou společnou vlastnost (4)
Dělat něco rychle znamená nedělat to pomalu (5)
$\exists p.p(\mathbf{Ka})\&p(\mathbf{Pe})$ (4')
$\forall p\forall x.(\mathbf{Ry}(p))(x)\rightarrow\neg(\mathbf{Po}(p))(x)$ (5')

Podobně Dedekindovu definici nekonečného oboru, (6), můžeme přímočaře zachytit jako (6') a axiom indukce (7) jako (7')

Obor P je nekonečný, lze-li ho jednoznačně zobrazit na jeho vlastní podmnožinu. (6)
$\mathbf{Nek}(\mathrm{P})\equiv\exists f.\forall x\forall y(fx=fy\rightarrow x=y)\&\forall x(\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{P}(fx))\&\exists y(\mathrm{P}(y)\&\forall x(\mathrm{P}(x)\rightarrow fx\neq y))$ (6')
Má-li jakoukoli danou vlastnost číslo 0, a má-li navíc tuto vlastnost následník n' každého čísla n, které tuto vlastnost má, pak tuto vlastnost mají všechna přirozená čísla. (7)
$\forall p.(p(\mathbf{0})\&\forall n(p(n)\rightarrow p(n')))\rightarrow\forall n.p(n)$ (7')

Potřeba (ii) pak může být motivována prostě snahou mít logiku, ve které bude možné vyjádřit pojmy, které v logice 1.řádu prokazatelně vyjádřitelné nejsou (jako například *nekonečnost*), a to ne nutně prostřednictvím explicitní definice v objektovém jazyce (jako je (6')). Přijmeme-li modelově-teoretické chápání logiky (viz Bairwise a Feferman, 1985), můžeme legitimně definovat například kvantifikátor $\exists_\infty$ metajazykovým předpisem (kde $\|...\|_{[x/d]}$ je ta interpretace, která se od $\|...\|$ liší nejvýše v tom, že $\|x\|_{[x/d]}=d$):

$\|\exists_\infty x P(x)\| = 1$ právě když existuje nekonečně mnoho takových předmětů d, že
$\|P(x)\|_{[x/d]} = 1$

Taková definice nás nutně nevede za hranice syntaxe logiky prvního řádu - $\exists_\infty$ je syntakticky výraz stejného typu jako $\exists$ a $\forall$, a zavádět nové výrazy tohoto typu je i v rámci logiky 1. řádu principiálně neproblematické (*viz* $\exists!$).

Z toho je vidět, že (i) a (ii), jakkoli spolu souvisejí, mají podstatně odlišnou povahu. V případě (i) se jedná o potřebu rozsáhlejšího repertoáru syntaktických prostředků, který sám o sobě nemusí znamenat skutečně netriviální krok za hranice logiky prvního řádu. Existuje totiž strategie, jak takové bohatší prostředky buď přímo "nasimulovat" v rámci logiky prvního řádu, či jak jazyk logiky prvního řádu rozšířit takovým způsobem, že potřebné syntaktické prostředky budou k dispozici, a přitom se za hranice logiky prvního řádu nedostaneme. Naznačme nyní dvě varianty strategie, jak redukovat kvantifikaci vyššího řádu na kvantifikaci řádu prvního.

Predikáty jako individua

První z těchto variant vychází z přesvědčení, že to, o čem je něco predikováno, je vždycky svou podstatou individuum. Frege (1892, s.197) říká: "pojem musí být [aby na něj mohl být aplikován jiný pojem] nejprve proměněn v předmět, nebo, přesněji řečeno, musí být zastoupen předmětem." To znamená, že to, co z výše uvedeného pohledu vidíme jako vlastnost vlastností aplikovanou na vlastnost, je z tohoto pohledu viděno jako vlastnost individuí, která není aplikovatelná přímo na vlastnost, ale na nějaký "objektuální korelát" (ve Fregově pojetí to je extenze) této vlastnosti. V přirozeném jazyce je tomu vskutku tak, že predikát obvykle spojujeme s nějakou jmennou formu (*nominalizací*) jiného predikátu (v typickém případě s podstatný jménem slovesným, či s infinitivem, v angličtině také s gerundiem). Tato úvaha vede k tomu, že například výrok je *Být statečný je dobré* je rekonstruován jako aplikace predikátu **Do** na term **BSt**, který označuje "objektuální korelát" predikátu **St**.

Je ovšem zřejmé, že systematická souvislost mezi predikáty a jejich objektuálními koreláty je relevantní logicky: odvození jako je (8) platí obecně.

Karel je statečný (8)
Být statečný je dobré

---

tedy *Karel má nějakou dobrou vlastnost*

Taková odvození ale není těžké logicky zachytit: je pouze třeba vzít vážně predikát *mít vlastnost* (zachytit ho jako binární predikátovou konstantu) a dále chápat **BSt** nikoli jako nedělitelný term, ale jako aplikaci "nominalizačního" operátoru **B** na predikát **St**, tedy chápat **BSt** jako **B**(**St**). Pak můžeme stanovit obecné odvozovací pravidlo

$P(T)$ (9)

---

tedy **MáVl**(T,**B**(P));

a z něj odvodit formální rekonstrukci odvození (8):

St(**Ka**) (8')
Do(**B**(**St**))

---

tedy **MáVl**(**Ka**,**B**(**St**))**&Do**(**B**(**St**))
a tedy $\exists x$.**MáVl**(**Ka**,x)**&Do**(x)

Operátor jako je **B** se ovšem přímo do logiky prvního řádu nevejde; jeho zavedení nicméně znamená jiný druh modifikace této logiky než zavedení predikátů vyšších řádů. Problémy kolem operátorů tohoto druhu, a obecněji problémy logické analýzy fenoménu nominalizace v přirozeném jazyce, podrobně rozebrali Chierchia (1982) a Turner (1983).[4]

Variací na téma této strategie je davidsonovský přístup k zachycení vět typu (2): Davidson (1980) navrhuje přidat ke každému predikátu nový, v přirozeném jazyce "skrytý" argument charakterizovatelný jako "událost": výrok (2) tedy bude chápán jako *Existuje "událost běžení", jejímž protagonistou je Karel a tato událost je rychlá* (srov. také Parsons, 1990).

$\exists u$.**Be**(u,**Ka**)**&Ry**(u). (2")

V jistém smyslu je možné jako zcela obecné vyjádření takovéto strategie vidět i teorii modelů a teorii množin, na které se teorie modelů zakládá: modelově-teoretickou interpretaci formálního jazyka je možné nahlédnout jako určitou formu překladu tohoto jazyka do jazyka teorie množin, tedy do určitého jazyka prvního řádu.[5] Teorii modelů (pro klasický, extenzionální predikátový počet) totiž můžeme vidět jako *de facto* prostředek překladu např. výroku $P(T)$ na "metavýrok" $\|T\| \in \|P\|$ (podobně, trochu složitěji, pro predikáty vyšších arit); a potažmo redukce pravdivosti toho prvního na pravdivost toho druhého - kdybychom psali prostě T namísto $\|T\|$, **B**(P) namísto $\|P\|$, a **MáVl** namísto $\in$, dostali bychom namísto $\|T\| \in \|P\|$ opět **MáVl**(T,**B**(P)).[6]

---

[4]Srov. též Peregrin (1990).

[5]Teorie množin může být ovšem i řádu vyššího než prvního, v teorii modelů se ale zpravidla pracuje s její prvořádovou verzí.

[6]Srv. též Peregrin (1992a).

Henkinovské chápání logik vyšších řádů

Druhá varianta této strategie je postavena na myšlence, že bez omezení připustíme výrazové prostředky logik vyšších řádů, avšak sémanticky je budeme interpretovat v duchu logiky řádu prvního; to znamená, že je budeme chápat jako pouze "výrazové varianty" prostředků prvořádových. Vezmeme-li logiku druhého řádu, bude tato strategie znamenat, neformálně řečeno, chápání relací jako zvláštního druhu individuí (relace tedy budou součástí domény individuí). To znamená, že výraz $P(T)$ budeme interpretovat jako vztah mezi dvěma individui: mezi jakožto individuum chápanou relací $\|P\|$ a "klasickým" individuem $\|T\|$. Tím se nám kvantifikace přes relace stane *de facto* kvantifikací přes určitý druh individuí.

Interpretace jazyka druhého řádu je tvořena univerzem U a interpretační funkcí, která zobrazuje individuální konstanty na prvky U a predikátové konstanty na relace nad U; oborem proměnnosti individuálních proměnných je pak U a oborem proměnnosti predikátových proměnných jsou příslušné množiny relací. Druhořádová interpretace se tedy od interpretace prvořádové fakticky liší tím, že vedle jediného oboru proměnnosti U disponuje i dalšími obory proměnnosti, konkrétně Pow(U), Pow(U^2), ... Pracovat s několika obory proměnnosti ale můžeme docela dobře i v rámci prvořádové sémantiky: přímo v rámci *sortované* logiky prvního řádu (což je přímočará a z formálního hlediska neproblematická modifikace standardní logiky prvního řádu, ve které máme namísto jedné kategorie termů a potažmo jednoho univerza individuí takových kategorií a univerz více), nepřímo pak i v rámci standardní (nesortované) logiky prvního řádu, a to tak, že jednotlivé obory proměnnosti "modelujeme" prostřednictvím různých částí jediného univerza. To můžeme udělat tak, že kvantifikaci přes nějaký specifický obor nahradíme kvantifikací přes celé univerzum, ale každou kvantifikovanou formuli budeme interpretovat jako kondicionál, jehož antecedent fakticky omezí kvantifikaci na tu část univerza, která modeluje příslušný obor: tak $\forall p.p(x)$ budeme chápat *de facto* jako $\forall y.\mathbf{P}(y)\rightarrow\mathbf{PR}(y,x)$, kde **P** je charakteristická funkce té části univerza, která modeluje obor proměnnosti unárních predikátových proměnných, a **PR** je binární predikát, který je výrazem chápání predikace jako vztahu mezi dvěma individui.

Každá druhořádová interpretace nám takto přímočarým způsobem "indukuje" určitou prvořádovou interpretaci; a to tak, že vztah mezi indukujícím a indukovaným zachovává splnitelnost. Nazývejme prvořádové interpretace toho typu, které jsou takto indukovány interpretacemi druhořádovými, interpretacemi *kvazidruhořádovými*. Kvazidruhořádové interpretace můžeme charakterizovat určitou prvořádovou teorií; problém je ovšem v tom, že ačkoli každá druhořádová interpretace indukuje interpretaci kvazidruhořádovou, ne každá kvazidruhořádová interpretace je indukována nějakou interpretací druhořádovou. Nebude tedy zaručeno, že každá formule platná při každé druhořádové interpretaci bude platná i při každé kvazidruhořádové interpretaci; a z Gödelovy věty lze dokázat, že skutečně budou nutně existovat formule, které budou platné druhořádově, avšak nikoli kvazidruhořádově.

Zajímavé je, že prakticky totéž, co provedeme tím, když začneme logiku druhého řádu interpretovat prvořádově, dosáhneme i tím, že připustíme takové druhořádové interpretace, ve kterých nebudou obory proměnnosti predikátových proměnných nutně obsahovat *všechny* relace příslušné arity. Lze totiž snadno ukázat, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi těmito tzv. henkinovskými interpretacemi[7] a interpretacemi kvazidruhořádovými.

Rozdíl mezi touto cestou "redukce" logiky druhého řádu na logiku prvního řádu a cestou probíranou v předchozím oddíle je ovšem v podstatě jenom "ideologický": zatímco v předchozím případě nejprve jazyk druhého řádu překládáme do nějakého jazyka prvního řádu a ten pak příslušným způsobem interpretujeme, v tomto případě oba tyto kroky spojujeme do jednoho a nehovoříme o žádném zprostředkujícím prvořádovém jazyce. (Nezavádíme tedy ani žádný problematický nominalizační operátor, jakým byl v předchozí kapitole **B**.) Říkali-li jsme v předchozím oddíle, že predikáty "překládáme" na termy, a ty pak interpretujeme jako individua, říkáme tady přímo, že predikáty interpretujeme jako individua - rozdíl to zjevně není podstatný.

Princip překladu logiky druhého řádu do logiky prvního řádu

Rozeberme si způsob redukce logiky vyššího řádu na logiku řádu nižšího podrobněji a rigorózněji - načrtněme proceduru, kterou můžeme každý druhořádový jazyk přetransformovat na jazyk prvořádový, a každou druhořádovou teorii na teorii prvořádovou. Pro jednoduchost se omezíme pouze na *monadickou* logiku druhého řádu, tj. na takovou, jejíž jazyk neobsahuje predikáty arity vyšší než 1; a dále se omezme na jazyky, které neobsahují funktory.

Jazyk monadického predikátového počtu druhého řádu (MPP2) se tedy skládá z individuálních a predikátových konstant (ik, pk), individuálních a predikátových proměnných (ip, pp), logických operátorů a kvantifikátorů. Jazyk dvousortového predikátového počtu prvního řádu (PP1(2)) nemá predikátové proměnné, ale jeho individuální konstanty i proměnné jsou rozděleny do dvou kategorií, tzv. sortů (ik^1, ik^2 a ip^1, ip^2).

Buď nyní dán jazyk L_1 MPP2. Vytvořme jazyk L_2 PP1(2) tak, že:

- množina ik^1 jazyka L_2 je totožná s množinou ik jazyka L^1
- množina ik^2 jazyka L_2 je totožná s množinou pk jazyka L^1
- množina ip^1 jazyka L_2 je totožná s množinou ip jazyka L^1
- množina ip^2 jazyka L_2 je totožná s množinou pp jazyka L^1
- množina pk jazyka L_2 obsahuje jediný výraz, binární pk **PR** typu <2,1> (tj. takovou, že dává výrok spolu s termem sortu 2 a termem sortu 1).

Definujme indukcí překlad výrazů L_1 na výrazy L_2 - je-li X výraz L_1, označíme jeho překlad v L_2 symbolem X^*:

X^*	= X je-li X ik, pk, ip nebo pp
$(P(T))^*$	$= \mathbf{PR}(P^*,T^*)$
$(V_1 \mathbin{\&} V_2)^*$	$= V_1^* \mathbin{\&} V_2^*$
$(V_1 \vee V_2)^*$	$= V_1^* \vee V_2^*$

[7] Podle Henkina (1950).

$(V_1 \rightarrow V_2)^* \quad = V_1^* \rightarrow V_2^*$
$(\neg V)^* \quad = \neg(V^*)$
$(\forall x V)^* \quad = \forall x^* V^*$
$(\forall p V)^* \quad = \forall f^* V^*$

Uvědomme si, že takto zavedený překlad můžeme chápat i jako pouhé *zavedení nové notace* pro MPP2 - jako triviální nahrazení zápisu $p(t)$ zápisem $\mathbf{PR}(p,t)$. Z tohoto pohledu je ovšem **PR** pomocným symbolem na úrovni závorek. Co se změní, když se na novou notaci začneme dívat jako na formule PP1(2) a na **PR** jako na binární predikát? Specifické axiomy MPP2, týkající kvantifikace přes predikáty, zřejmě přejdou v instance axiomů PP1(2), týkající se kvantifikace přes termy sortu 2; a stejně tak pro pravidlo druhořádové generalizace. Protože za axiomy MPP2 bereme i instance pravidla komprehenze (tj. výroky tvaru $\exists p \forall x(p(x) \leftrightarrow F)$, kde F nemá jinou volnou proměnnou než x), musíme k axiomům PP1(2) přidat i jeho překlad (kde x je proměnná sortu 1 a y proměnná sortu 2 a F opět nemá jinou volnou proměnnou než x):

$$\exists y \forall x(\mathbf{PR}(y,x) \leftrightarrow F) \qquad \text{(Kompr)}$$

Budeme-li nyní mít v L_2 symbol = pouze mezi termy sortu 1, bude takto definovaný překlad *vzájemně jednoznačnou* funkcí (každé formuli L_1 odpovídá právě jedna formule L_2 a naopak), a navíc bude zřejmě platit, že formule L_1 bude teorémem MPP2 právě když bude její překlad v L_2 teorémem PP1(2)+(Kompr). Připustíme-li = i mezi termy sortu 2, budeme mít v L_2 i takové vf, které nebudou překlady žádných vf L_1 (překlad již tedy nebude surjekcí); a bude rozumné přidat následující axiom:

$$\forall y \forall z(\forall x(\mathbf{PR}(y,x) \leftrightarrow \mathbf{PR}(z,x)) \rightarrow (y=z)) \qquad \text{(Ext)}$$

Bude však zřejmě platit, že vf L_1 je teorémem MPP2 právě když je jeho překlad v L_2 teorémem PP1(2)+(Kompr)+(Ext).

Buď nyní T teorie v jazyce L_1; definujeme teorii T^* v jazyce L_2 tak, že obsahuje překlad A^* každého axiomu A teorie T plus (Ext) a (Kompr). Buď $I=\langle U,P\rangle$ (kde U je množina a P přiřazuje prvky U individuálním konstantám L_1 a podmnožiny U predikátovým konstantám L_1) modelem teorie T. Položme $U_1=U$, $U_2=Pow(U)$ a definujme funkci P^* jako takové minimální rozšíření funkce P, pro které $P^*(\mathbf{PR})=\{\langle y,x\rangle \mid x\in y\}$. Pak je $I^*=\langle U_1,U_2,P^*\rangle$ zřejmě interpretací jazyka L_2. Snadno ověříme, že I splňuje výrok V jazyka L_1 právě když I^* splňuje překlad V^* výroku V do jazyka L_2; a protože I^* zřejmě splňuje (Ext) i (Kompr), je I^* modelem T^*. Z této úvahy obecně plyne: Každé interpretaci nějaké teorie v rámci MPP2 odpovídá určitá jednoznačně určená interpretace překladu příslušné teorie do PP1(2); speciálně každé interpretaci MPP2 odpovídá nějaká jednoznačně určená interpretace PP1(2)+(Ext)+(Kompr).

Buď naopak $I^*=\langle U_1,U_2,P^*\rangle$ modelem T^*. Přiřaďme každému prvku y množiny U_2 podmnožinu m(y) množiny U_1 takovou, že $m(y)=\{x\in U_1 \mid \langle y,x\rangle\in P^*(\mathbf{PR})\}$ (Prvky U_2 tak chápeme, neformálně řečeno, jako "objektuální koreláty" podmnožin U_1 - prvek y je objektuální korelát množiny m(y), nebo, můžeme říci, je přímo touto množinou, ale "chápanou jako objekt". Axiom (Ext) zaručuje, že funkce m je prostá, tj. že každý prvek U_2 je "objektuálním korelátem" nejvýše jedné podmnožiny U_1). Buď nyní P taková funkce, že $P(i)=P^*(i^*)$ pro každou ik i jazyka L_1 a $P(p)=m(P^*(p^*))$ pro každou pk p jazyka L_1; pak je $I=<U_1,P>$ interpretací jazyka L_1. Rozlišme nyní dva případy: za prvé, je-li oborem hodnot funkce m celá množina $Pow(U_1)$ (tj. je-li každá $u \subseteq U_1$ hodnotou m(y) pro nějaké $y \in U_2$), pak zřejmě opět pro každý výrok V jazyka L_1 platí, že je splňován I právě když je V^* splňován I^*, a speciálně že I je modelem T; a interpretace I a I^* si v tomto odpovídají. Jestliže je ale, za druhé, obor m vlastní částí $Pow(U_1)$ (tj. existuje-li $u \subseteq U_1$, která není hodnotou m(y) pro žádné $y \in U_2$), pak nelze vyloučit možnost existence výroku V jazyka L_1, který bude splňován I, ačkoli V^* nebude splňován I^*, nebo naopak. (Takový výrok by mohl například tvrdit existenci právě takové podmnožiny univerza, jejíž "objektuální korelát" v U_2 není.) Tedy: některé, ale nikoli obecně každé, interpretaci nějaké teorie v rámci PP1(2)+(Ext)+(Kompr) odpovídá určitá jednoznačně určená interpretace překladu příslušné teorie do MPP2; speciálně některé, ale nikoli obecně každé, interpretaci PP1(2)+(Ext)+(Kompr) odpovídá nějaká jednoznačně určená interpretace MPP2.

Ukažme nyní dále, že teorie v rámci sortovaného prvního řádu lze zcela přímočaře přeložit na teorie v rámci nesortovaného prvního řádu. Zkonstruujme k tomu účelu jazyk L_3 PP1 tak, že

- množina ik L_3 je totožná s množinou $ik^1 \cup ik^2$ L_2
- množina ip L_3 je totožná s množinou $ip^1 \cup ip^2$ L_2
- množina pk L_3 je tvořena binárním predikátem **PR** a unárními predikáty $\mathbf{S^1}$ a $\mathbf{S^2}$.

Definujme indukcí překlad výrazů L_2 na výrazy L_3 - je-li X výraz L_2, označíme jeho překlad v L_3 symbolem X^+:

X^+	= X je-li X ik nebo ip
$\mathbf{PR}(T,T')^+$	$= \mathbf{PR}(T^+,T'^+)$
$(V_1 \mathbin{\&} V_2)^+$	$= V_1^+ \mathbin{\&} V_2^+$
$(V_1 \vee V_2)^+$	$= V_1^+ \vee V_2^+$
$(V_1 \rightarrow V_2)^+$	$= V_1^+ \rightarrow V_2^+$
$(\neg V)^+$	$= \neg(V^+)$
$(\forall x V)^+$	$= \forall x^+(\mathbf{S^i}(x^+) \rightarrow V^+)$, kde i je sort proměnné x v jazyce L_2

Tento překlad ovšem rozhodně není surjektivní: existují tedy formule L_3, které nejsou překladem žádné formule L_2, totiž výroky, které kvantifikují přes celé univerzum, a nikoli jenom přes jednu z jeho částí modelujících sorty L_2 (tj. výroky tvaru $\forall xV$ nebo $\exists xV$, kde V nemá tvar $\mathbf{S^i}(x) \rightarrow V'$), či výroky, které obsahují predikát $\mathbf{S^i}$ jinde než v antecedentu kvantifikované implikace.

Uvažme výrok V jazyka L_2, který je axiomem PP1(2), a jeho překlad V^+ do L_3. Je-li V axiomem výrokového počtu, je zřejmě i V_+ axiomem PP1; a je-li V axiomem týkajícím se kvantifikace, je V_+ přímým důsledkem příslušného obecného axiomu kvantifikace PP1, přijmeme-li pro každou ik^1 X, která se ve V vyskytuje, postulát

$$\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(X^+) \tag{IK1}$$

a pro každou takovou ik^2 postulát

$$\mathbf{S}^{\mathbf{2}}(X^+). \tag{IK2}$$

Buď tedy T_2 teorie v jazyce L_2; definujeme teorii T_3 v jazyce L_3 tak, že obsahuje překlad A^+ každého axiomu A teorie T_2, dále příslušnou instanci axiomu (IK1) resp. (IK2) pro každou ik^1 resp. ik^2 jazyka L_2, a navíc následující axiomy (které se týkají výhradně takových formulí L_3, které nejsou překlady žádných formulí L_2):

$$\exists x.\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x) \tag{NEmpt1}$$
$$\exists x.\mathbf{S}^{\mathbf{2}}(x) \tag{NEmpt2}$$
$$\forall x.\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x) \lor \mathbf{S}^{\mathbf{2}}(x) \tag{Exhst}$$
$$\neg\exists x.\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x) \,\&\, \mathbf{S}^{\mathbf{2}}(x) \tag{Disj}$$
$$\mathbf{PR}(y,x) \rightarrow \mathbf{S}^{\mathbf{2}}(y) \,\&\, \mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x) \tag{PR}$$

Teorie T_3 je zřejmě teorií prvního řádu a platí, že výrok V jazyka L_2 je teorémem T_2 právě když je jeho překlad V^+ do jazyka L_3 teorémem T_3.

Buď nyní $I=\langle U_1,U_2,P\rangle$ modelem teorie T_2. Buď $U=U_1\cup U_2$ a buď P^+ taková funkce, že $P^+(X)=P(X)$, je-li X ik nebo pk L_2, a $P(\mathbf{S}^{\mathbf{i}})=U_i$ pro i=1,2; pak je $I^+=\langle U,P^+\rangle$ zřejmě interpretací L_3 a snadno ověříme, že platí, že výrok V jazyka L_2 je splňován I právě když je V^+ splňován I^+. Navíc, protože I^+ zřejmě splňuje (NEmpt1), (NEmpt2),(Exhst), (Disj), (PR) i všechny instance (IK1) a (IK2) je I^+ modelem teorie T_3. Buď obráceně $I^+=\langle U,P\rangle$ modelem T_3. Buď $U_i=P(\mathbf{S}^{\mathbf{i}})$ pro i=1,2, a buď P^- zúžení funkce P na množinu ik a pk L_2; pak je zřejmě $I=\langle U_1,U_2,P^-\rangle$ interpretací L_2 a platí, že výrok V^+ jazyka L_3 je splňován I^+ právě když je V splňován I; a I je tedy také modelem T_2. Tedy: výrok V je splňován nějakým modelem teorie T právě když je V^+ splňován nějakým modelem T^+; a V je platný v každém modelu T právě když je V^+ platný v každém modelu T^+.

Spojíme-li to, k čemu jsme dosud dospěli, dohromady, můžeme uzavřít, že existuje určitá třída prvořádových interpretací (a sice těch, které jsou modely axiomů (NEmpt), (Exhst1), (Exhst2), (Disj), (PR) a překladů (Ext+) a (Kompr+) axiomů (Ext) a (Kompr)), které nám v jistém přesně vymezeném smyslu v rámci prvořádové logiky "modelují" interpretace druhořádové.

$$\forall y.\mathbf{S}^{\mathbf{2}}(y)\rightarrow\forall z.\mathbf{S}^{\mathbf{2}}(z)\rightarrow(\forall x(\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x)\rightarrow(\mathbf{PR}(y,x)\leftrightarrow\mathbf{PR}(z,x)))\rightarrow(y=z)) \tag{Ext+}$$
$$\exists y.\mathbf{S}^{\mathbf{2}}(y)\,\&\,\forall x.\mathbf{S}^{\mathbf{1}}(x)\rightarrow(\mathbf{PR}(y,x)\leftrightarrow F) \tag{Kompr+}$$

Nazývejme tyto interpretace *kvazidruhořádovými*. Nazveme-li prvořádovou teorii tvořenou axiomy (NEmpt1), (NEmpt2), (Exhst), (Disj), (PR), (Ext+) a (Kompr+) *kvazidruhořádovým predikátovým počtem* (*KDPP*), bude kvazidruhořádová interpretace (prvořádovou) interpretací kvazidruhořádového predikátového počtu. To, k čemu jsme dosud dospěli, pak znamená, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou všech druhořádových a určitou podmnožinou množiny kvazidruhořádových interpretací, takový, že druhořádová interpretace I je modelem druhořádové teorie T právě když je jí odpovídající kvazidruhořádová interpretace I' modelem překladu teorie T do logiky prvního řádu; existuje tedy vzájemně jednoznačná korespondence mezi množinou všech druhořádových a množinou určitých kvazidruhořádových interpretací taková, že *modulo* překlad zachovává splňování.

Existují ale i takové kvazidruhořádové interpretace, které takto nekorespondují s žádnou druhořádovou interpretací. To znamená, že každý výrok MPP2, který bude mít za překlad výrok platný v KDPP, bude platný v MPP2; nelze ale obecně říci, že naopak každý výrok platný MPP2 bude mít za překlad výrok obecně platný v KDPP. Důvodem je, že výrok KDPP může platit v každé interpretaci, která odpovídá nějaké interpretaci MPP2, avšak neplatit v nějaké interpretaci, která žádné interpretaci MPP2 neodpovídá. Tomuto bychom mohli zamezit jedině v případě, že bychom dokázali množinu kvazidruhořádových interpretací zúžit tak, aby obsahovala právě jen ty interpretace, které skutečně odpovídají interpretacím druhořádovým. V případě *monadické* logiky druhého řádu lze ukázat, že tohle vskutku možné je - bylo totiž dokázáno, že množina výroků platných v MPP2 je rekurzivní (viz např. Dreben a Goldfarb, 1979, kapitola 8.3).

Existují tedy i kvazidruhořádové interpretace, kterým neodpovídají žádné interpretace druhořádové - ty mohou způsobit to, že překlady některých výroků, které jsou obecně druhořádově platné, nebudou obecně platné kvazidruhořádově - překlad logiky druhého řádu do logiky prvního řádu tedy nebude v tomto smyslu plnohodnotný. Standardní logika 2. řádu tedy není obecně redukovatelná na logiku 1.řádu. Jiná situace ovšem nastane, když nebudeme pojem druhořádové interpretace definovat tak, jak jsme to učinili výše, tj. *standardně*, ale když připustíme, aby oborem interpretace predikátových konstant a oborem proměnnosti predikátových proměnných určité arity mohla být i vlastní podmnožina množiny všech příslušných relací, tj. když ji budeme interpretovat *henkinovsky*. Mezi henkinovskými a kvazidruhořádovými interpretacemi *je*, jak se dá ukázat (viz např. Shapiro, 1991, kap. 4.3) jednoznačná, splňování zachovávající korespondence - každá henkinovská interpretace je tedy *de facto* nahlédnutelná jako interpretace kvazidruhořádová a naopak. Henkinovsky interpretovaná logika 2. řádu tedy *je* beze zbytku redukovatelná na logiku 1.řádu.

Shrnutí fakt o přeložitelnosti

Analogicky tomu, jak jsme postupovali při uvedeném překladu monadické logiky druhého řádu do logiky prvního řádu, lze, *mutatis mutandis*, postupovat i při překladu úplné (nemonadické) logiky druhého řádu do logiky řádu prvního. Je jenom třeba přidat další sorty resp. "kvazisorty" pro predikáty arity větší než 1. V případě nemonadické logiky druhého řádu už ale dokazatelně nepůjde vymezit kvazidruhořádové modely tak, aby druhořádová platnost implikovala kvazidruhořádovou platnost: z Gödelovy věty o neúplnosti totiž plyne, že množina všech druhořádově platných výroků není rekurzivně vyčíslitelná (a tedy ani axiomatizovatelná); a bude tedy existovat platný výrok logiky druhého řádu, jehož překlad do logiky prvního řádu platný nebude. (To plyne přímo například z toho, že v rámci druhého řádu můžeme kategoricky axiomatizovat Peanovu aritmetiku konečným počtem axiomů: Je-li PA konjunkcí těchto axiomů a G Gödelova nerozhodnutelná formule, bude formule PA→G zřejmě druhořádově platná, její překlad do logiky 1. řádu však nikoli). Můžeme tedy shrnout:

1. *Existuje* překlad logiky druhého řádu do logiky prvního řádu takový, že obecně platí, že je-li V výrokem logiky druhého řádu a V' jeho překladem, pak je-li V' logicky platný, je i V logicky platný; a navíc platí, že V je teorémem logiky druhého řádu právě když je V' teorémem logiky prvního řádu.

2. *Neexistuje* překlad logiky druhého řádu do logiky prvního řádu takový, aby obecně platilo, že je-li V výrokem logiky druhého řádu a V' jeho překladem, pak je-li V logicky platný, je i V' logicky platný.

Obdobně můžeme obecně definovat překlad jakékoli logiky řádu n do logiky řádu menšího než n. Avšak jakmile začneme zkoumat překlad logiky třetího řádu do logiky druhého řádu, čeká nás zjištění, které nás asi překvapí - logika třetího řádu, a obecněji logika jakéhokoli řádu většího než dvě, je na logiku řádu druhého *skutečně beze zbytku redukovatelná*; přechod od logiky druhého k logice vyššího řádu už tedy fakticky neznamená, na rozdíl od přechodu od logiky prvního k logice druhého řádu, žádný "nárůst síly". Podstatný rozdíl je tedy jedině mezi prvním a druhým řádem; logiku jakéhokoli vyššího řádu lze bez újmy považovat za "výrazovou variantu" logiky druhého řádu.

Proč tomu tak je, můžeme nahlédnout, když se vrátíme k úvahám o tom, proč nejde logiku druhého řádu redukovat na logiku řádu prvního. Došli jsme k závěru, že problém je v tom, že množina kvazidruhořádových interpretací, tak jak jsme ji dokázali definovat, obsahuje i některé interpretace, které nemají ekvivalenty mezi interpretacemi druhořádovými; poznamenali jsme, že tento problém by byl odstraněn, kdyby se nám podařilo charakterizovat právě tu množinu kvazidruhořádových interpretací, které takové ekvivalenty mají. Vrátíme-li se k terminologii předchozí kapitoly, můžeme říci, že jsou to ty interpretace, ve kterých má každá podmnožina univerza svůj "objektuální korelát"; je-li tedy $<U_1,U_2,P>$ kvazidruhořádovou interpretací, pak tato interpretace má druhořádový ekvivalent právě když pro každou podmnožinu u množiny U_1 existuje nějaký prvek y množiny U_2 tak, že $u=\{x\in U_1 \mid <y,x>\in P^*(\mathbf{PR})\}$. Kýženou podmnožinu kvazidruhořádových interpretací bychom tedy dokázali vymezit, kdybychom k axiomům KDPP přidali axiom

$$\forall p\exists y.\mathbf{S}^2(y)\&\forall x.\mathbf{S}^1(x)\rightarrow(\mathbf{PR}(y,x)\leftrightarrow p(x))$$

Důvodem, proč jsme toto učinit nemohli, bylo to, že jde o formuli *druhého* řádu - p je *predikátová* proměnná (jako "náhražku" jsme mohli přijmout jenom axiomové schéma (Kompr+)). Jiná situace by ovšem nastala, kdyby byl jazyk, do kterého bychom překládali, druhého řádu - pak bychom takový axiom přijmout mohli. Pokud by nám šlo, tak jako předtím, o redukci logiky druhého řádu, vyšlo by ovšem naše počínání naprázdno (redukovali bychom logiku druhého řádu zase na logiku druhého řádu); uvedený postup ale můžeme s netriviálním úspěchem použít, redukujeme-li na druhý řád logiku řádu vyššího než dvě. Podrobněji o tom viz Shapiro (1989, kap. 6).

K tomu poznamenejme, že analogicky (s dalšími obměnami) můžeme postupovat nejenom v případě redukce jakéhokoli predikátového počtu vyššího řádu na predikátový počet řádu nižšího, ale například i při redukci modální a intenzionální logiky (viz Hughes & Cresswell, 1968; Montague, 1974; Gallin, 1975) na standardní logiku. V tomto případě je třeba interpretovat modální či intenzionální operátory (modální operátory $\Box$ a $\Diamond$, Montaguovy operátory $^\wedge$ a $^\vee$) jako kvantifikátory vážící "skryté" proměnné typu možných světů. Mějme jazyk L_1 modálního výrokového počtu (tj. jazyk obsahující výrokové symboly, logické operátory klasické logiky, plus operátory $\Box$ a $\Diamond$); a definujme jazyk L_2 PP1, který obsahuje pro každý výrokový symbol V jazyka L_1 unární predikát P_V a který obsahuje jedinou proměnnou w. Definujme překlad z L_1 do L_2 následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
V^* &= P_V(w) \\
(V_1 \mathbin{\&} V_2)^* &= V_1^* \mathbin{\&} V_2^* \\
(V_1 \vee V_2)^* &= V_1^* \vee V_2^* \\
(V_1 \rightarrow V_2)^* &= V_1^* \rightarrow V_2^* \\
(\Box V)^* &= \forall w(V^*) \\
(\Diamond V)^* &= \exists w(V^*)
\end{aligned}
$$

Překlady některých (konkrétně nemodálních) výroků L_1 budou ovšem *otevřenými* formulemi L_2 - budou obsahovat volnou proměnnou w. Tyto formule tedy budou při dané interpretaci pravdivé či nepravdivé jedině relativně k přiřazení hodnoty proměnné w. Budeme-li obor proměnnosti w chápat jako množinu "možných světů", bude tak možné tyto formule chápat jako interpretované funkcemi z možných světů do pravdivostních hodnot - což odpovídá standardní formě sémantiky pro modální logiky (poprvé definované Kripkem, 1963). Pravdivostní hodnoty modálních výroků L_1 budou ovšem v L_2 na možných světech nezávislé (půjde o modality typu S5).

Jazyk montaguovské intenzionální logiky je *de facto* jazykem predikátového počtu nekonečného řádu (přesněji řečeno jazykem tzv. *teorie typů* - viz Church, 1940), který navíc obsahuje operátory "intenzionalizace" ($^\wedge$) a "extenzionalizace" ($^\vee$). Sémantika této logiky je definována tak, že každému výrazu je přiřazena nikoli jedna, ale *dvě* hodnoty - *extenze* a *intenze*. Montaguovské operátory pak fungují tak, že extenzí $^\wedge$V je intenze V a intenzí $^\vee$V je extenze V - tyto operátory jsou tedy navzájem duální. Příslušnou logiku můžeme analogicky redukovat na dvousortovou teorii typů (standardní, nemodální dvousortový predikátový počet nekonečného řádu); relevantními překladovými pravidly pak jsou[8]

$$({}^{\wedge}V)^{*} = \lambda w(V^{*})$$
$$({}^{\vee}V)^{*} = V^{*}(w)$$

Tak můžeme intenzionální predikátový počet řádu n přeložit do dvousortového extenzionálního predikátového počtu řádu n (potažmo do standardního predikátového počtu řádu n, a ten pak případně dále do predikátového počtu řádu 2, či, přijmeme-li henkinovské interpretace, řádu 1). Montaguovskou intenzionální logiku tedy takto můžeme chápat jako jistou "výrazovou variantu" dvousortové teorie typů (viz Gallin, 1975; Janssen, 1983). Někteří logikové, zejména Tichý (1978) ovšem nazývají *intenzionální logikou* v podstatě přímo dvousortovou teorii typů - je třeba si uvědomit, že pak jejich logika v podstatě není intenzionální v Montaguově smyslu.[9] Autoři, kteří rozvíjejí Montaguovo dědictví a kteří tak vlastně došli k závěru, že montaguovská logika je nejlépe nahlédnutelná jako v tomto smyslu "parazitující" na dvousortové teorii typů, tedy dali ve skutečnosti za pravdu Tichému, jehož intenzionální logika - z tohoto hlediska - ničím jiným než dvousortovou teorií typů nebyla od počátku.

Diskuse a závěr

Otázkou nyní je, do jaké míry skutečně potřebujeme predikátový počet druhého řádu v celé jeho síle, tedy i s jeho na první řád neredukovatelnými logickými pravdami, a nakolik vystačíme s tou jeho částí, která je na první řád redukovatelná - jinými slovy, do jaké míry musíme chápat sémantiku logiky 2. řádu standardně, a do jaké ji můžeme chápat henkinovsky. Je zřejmé, že je-li naší motivací analýza přirozeného jazyka s jeho výroky jako jsou (1) či (4), pak nám nic nebrání přijmout henkinovskou sémantiku a tedy chápat logiky vyšších řádů jako výrazové varianty logiky řádu prvního.

Situace je samozřejmě složitější, jde-li nám o matematiku. Vezměme definici nekonečnosti, jak je vyjádřena v (6'). Je zřejmé, že tuto definici můžeme formulovat, jakmile máme k dispozici *syntaktické* prostředky logiky 2. řádu. Tato definice nám také v každém případě (bez ohledu na to, zda jazyk interpretujeme standardně nebo henkinovsky) vymezuje

---

[8]Tento podrobnější výklad snad může sloužit jako odpověď na Cmorejovu (1994a;b) kritiku mého naznačení této redukce v dodatku mé knihy (Peregrin, 1992); nejsem si ale jist, zda jsem Cmorejově kritice skutečně dobře porozuměl.

[9]"Být intenzilnální v Montaguově smyslu" totiž *de facto* znamená "nebýt kompozicionální"; což vlastně, přísně vzato, není možné - definovat (nekonečný) jazyk totiž zřejmě dokážeme jedině prostřednictvím rekurze (prostřednictvím konečného počtu výchozích prvků a konečného počtu kompozičních pravidel). Nekompozicionální (a tudíž i montaguovsky intenzionální) formální jazyk je možné definovat jedině na základě nějakého jazyka kompozicionálního (tak Montaguova logika je kompozicionální na úrovni intenzí a její nekompozicionalita a tudíž intenzionalita vzniká jenom díky tomu, že za primární je prohlášena úroveň extenzí, které ovšem nutně "parazitují" na intenzích).

množiny, které jsou zobrazitelné na svou vlastní část, a za nekonečné prohlašuje právě ony. Obecně se má za to, že tato definice je v případě standardně interpretovaného jazyka správná, zatímco v případě jazyka interpretovaného henkinovsky nesprávná; tedy že k definici nekonečnosti (a potažmo konečnosti) potřebujeme logiku druhého řádu v její plné síle. Důvodem je to, že v případě standardní interpretace znamená neexistence "skutečnou" neexistenci, a definice tedy vymezuje právě ty množiny, které jsou "skutečně" zobrazitelné na svoje vlastní části a tedy "skutečně" nekonečné; zatímco v případě henkinovské interpretace může neexistence znamenat jenom relativní "neexistenci v rámci modelu", a množina, pro kterou (v rámci modelu) neexistuje zobrazení na její vlastní část, může být docela dobře "ve skutečnosti" nekonečná - všechna její zobrazení na své vlastní části mohou ("náhodou") existovat jen mimo model.

Aniž bychom se chtěli pouštět do hlubší analýzy tohoto problému, poznamenejme, že takovéto chápání rozdílu mezi standardní a henkinovskou logikou druhého řádu, ač bývá často bráno za zcela samozřejmou věc, zcela neproblematické není. Předpokládá totiž obrázek, podle kterého matematickou skutečnost chápeme nějak přímo, a logickými jazyky ji jenom druhotně popisujeme (zdůrazněme, že to je něco *víc*, než prostě chápat matematiku realisticky, tj. chápat matematické entity jako existující nezávisle na matematicích). Standardní chápání logiky druhého řádu by totiž nedávalo dobrý smysl, pokud bychom nebrali za jasnou a hotovou věc takové pojmy jako *všechny podmnožiny dané množiny*. Proti tomuto pohledu lze postavit poněkud jiný pohled, který jako první podrobně analyzoval Skolem (zvl. 1958), a který vychází z toho, že matematické pojmy jsou inherentně relativní -že dávají smysl jenom v kontextu určité teorie. Řekneme-li tedy, že je nějaká množina nekonečná, musíme se ptát *v rámci které teorie* - množina totiž může být podle jedné teorie (třeba henkinovské logiky druhého řádu) konečná, a podle jiné (standardní logiky druhého řádu) nekonečná. To, že z hlediska standardního modelu se může příslušný henkinovský model jevit jako něco postrádající, ještě neznamená, že ten první je v nějakém smyslu úplný a ten druhý neúplný.

Tento pohled ovšem činí problematickým sám pojem *standardní* interpretace: "být standardní" totiž znamená "brát v úvahu *všechny* podmnožiny", a prohlásit něco za standardní tedy můžeme jedině z nějakého absolutního stanoviska, ze kterého můžeme rozhodnout, kdy jsou podmnožiny *všechny*, a kdy nikoli. Standardní interpretace tak nejsou vymezitelné jinak než takto prostřednictvím odkazu na dále neanalyzovaný pojem všech podmnožin (který je sice zcela přímočarý pro *konečné* množiny, méně však pro množiny nekonečné) - na rozdíl od henkinovských interpretací nejsou vymezitelné nějakou rekurzivní specifikací. Z toho vyplývá, že oč je logika druhého řádu jako východisko matematiky intuitivně přijatelnější, o to je - v jistém smyslu - triviálnější. Jestliže to trochu přeženeme, můžeme říci, že zatímco v rámci logiky prvního řádu nedokážeme charakterizovat například nekonečné množiny, v logice druhého řádu to dokážeme, ale *de facto* nikoli o mnoho netriviálněji, než když prostě řekneme, že to jsou množiny, které jsou ("skutečně") nekonečné.

Ať už je však vztah mezi logikou prvního a druhého řádu jakkoli problematický, jisté je, že vztah mezi logikou druhého a vyššího řádu problematický není - jakákoli logika řádu vyššího než dvě může být chápána jako "výrazová varianta" logiky druhého řádu (čímž ovšem není řečeno, že by nám nemohla být právě tato výrazová varianta, třeba v kontextu logické analýzy přirozeného jazyka, užitečná).

Domnívám se, že diskuse o vztahu mezi logikou prvního a vyšších řádů často trpí tím, že jejich účastníci jednak dostatečně nespecifikují, *co* vlastně logikami vyšších řádů rozumějí, a jednak neberou v úvahu celou hloubku problematičnosti tohoto vztahu. V tomto článku jsem se pokusil shrnout některá fakta, která tuto problematičnost charakterizují.

Citovaná literatura

Barwise, J., Feferman, S., eds. (1985): Model-theoretic logics, Springer, New York.

Cmorej, P. (1994a): Recenze knihy Peregrin (1992), *Filosofický časopis* 42, 152-161.

Cmorej, P. (1994b): 'K jednej recenzii dvoch recenzií', *Filosofický časopis* 42, 661-672.

Davidson, D. (1980): *Essays on Actions and Events*, Clarendon Press, Oxford.

Dreben, B. a Goldfarb, W. (1979): *The decision problem:solvable classes of quantificational formulas*, Addison-Wesley, London.

Frege, G. (1892): 'Über Begriff und Gegenstand', *Vierteljahrschrift für wissentschaftliche Philosophie* 16, pp. 192-205.

Gallin, D. (1975): *Intensional and Higher-order Modal Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Henkin, L. (1950): 'Completness in the Theory of Types', *Journal of Symbolic Logic* 15, pp. 81-91.

Hughes, G.E., Cresswell,M.J. (1968): *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London.

Chierchia, G. (1982): 'Nominalization and Montague Grammar', *Linguistics and Philosophy* 5.

Church, A. (1940): 'A Formulation of the Simple Theory of Types', *Journal of Symbolic Logic* 5, pp. 56-68.

Janssen, T.M.V. (1983): *Foundations and Applications of Montague Grammar*, dissertation, Mathematical Centre, Amsterdam.

Kripke, S. (1963): 'Semantical Considerations on Modal Logic', *Acta Philosophica Fennica* 16, pp. 83-94.

Montague, R. (1974): *Formal Philosophy: selected papers of R.Montague* (ed. by R.Thomason), Yale University Press, New Haven.

Moore, G.H. (1988): 'The Emergence of First-Order Logic', *History and Philosophy of Modern Mathematics* (ed. W. Aspray and P.Kitcher), University of Minnesota Press, Minneapolis.

Parsons, T. (1990): *Events in the Semantics of English*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Peregrin, J. (1990): *Theory of Types: Good Servant Bad Master*, Prague Studies in Mathematical Linguistics 10, 159-176.

Peregrin, J. (1992a): *Meaning, Truth and Models*, From the Logical Point of View 2/92, 67-75.

Peregrin, J. (1992b): *Logika ve filosofii, filosofie v logice*, Herrman a synové, Praha.

Shapiro, S. (1991): *Foundations without Foundationalism*, Clarendon Press, Oxford.

Skolem, T. (1958): 'Une relativisation des notions mathématiques fondamentales', *Colloques internationaux du Centre de la Recherche Scientifique*, Paris, 13-18; reprinted in Skolem: *Selected Works in Logic* (ed. J.E. Fenstadt), Universitetsforlaget, Oslo, 633-38.

Tichý, P. (1978): 'Two Kinds of Intensional Logic', *Epistemologia* 1, pp. 143-164. [Český překlad 'Dva druhy intenzionální logiky' ve výboru statí P.Tichého *O čem mluvíme?*, FILOSOFIA, Praha 1996.]

Turner, R. (1983): 'Montague Semantics, Nominalization and Scott's Domains', *Linguistics and Philosophy* 6.

Dodatek - některé důležité definice
(notoricky známé definice některých elementárních pojmů nahrazujeme třemi tečkami)

Jazyk 1. řádu obsahuje množinu individuálních konstant (ik), nejvýše spočetnou množinu individuálních proměnných (ip), pro každé přirozené číslo n nejvýše spočetnou množinu predikátových konstant arity n (pkn), unární výrokový operátor ¬, binární výrokové operátory **&**, ∨, →, kvantifikátory ∀ a ∃; a pomocné (synkategorematické) symboly, jako jsou závorky (funktory pro jednoduchost pomíjíme). Výroková formule (vf) tohoto jazyka je tvořena n-árním predikátem a n-ticí termů (kde term je ik nebo ip), unárním operátorem plus vf, binárním operátorem plus dvěma vf nebo kvantifikátorem plus ip plus vf. Ip může být ve vf *volná* nebo *vázaná* (...), vf bez volných proměnných nazýváme *výrokem*. *Extralogický slovník* jazyka 1. řádu je množina všech ik a pk tohoto jazyka.
Interpretace jazyka 1.řádu je uspořádaná dvojice <U,F>, kde U je množina ("univerzum") a F je funkce definovaná na extralogickém slovníku tohoto jazyka taková, že $F(k)\in U$, je-li k ik, a $F(k)\subseteq U^n$, je-li k pk. Interpretace některé vf *splňuje*, a ostatní *nesplňuje* (...).
Axiomy 1.řádu nazveme všechny výroky (v jakémkoli jazyce 1. řádu), které mají jeden z tvarů A1-A5 (kde A,B,C jsou vf, x je ip, A_x je ta vf, která vznikne z A nahrazením x libovolnou ik nebo ip takovou, aby se v A_x nestala vázanou, a D je vf, ve které není volná proměnná x).

$$(A\to(B\to A)) \tag{A1}$$
$$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)) \tag{A2}$$
$$(\neg B\to A)\to((\neg B\to\neg A)\to B) \tag{A3}$$
$$\forall xA\to A_x \tag{A4}$$
$$\forall x(D\to B)\to(D\to\forall xB) \tag{A5}$$

Odvozovacími pravidly 1. řádu nazveme pravidla MP a Gen.

z A a $A\to B$ odvoď B (MP)
z A odvoď $\forall xA$ (Gen)

Teorie 1. řádu je uspořádaná dvojice <J,A>, kde J je jazyk prvního řádu a A je množina výroků tohoto jazyka. Je-li T=<J,A> teorie, je J jazykem T a A množinou (extralogických) axiomů T. *Extralogický slovník* teorie 1. řádu je extralogický slovník jazyka této teorie. *Predikátovým počtem 1. řádu* (PP1) nazveme teorii 1. řádu, jejíž jazyk neobsahuje žádné extralogické symboly a jejíž množina extralogických axiomů je prázdná.
Modelem teorie T je každá interpretace jazyka T, která splňuje axiomy T. Teorémem teorie T je každý prvek té nejmenší množiny výroků, která obsahuje axiomy 1. řádu a axiomy T a která je uzavřená vzhledem k odvozovacím pravidlům 1. řádu. Výrokem platným podle T je výrok, který je splňován každým modelem teorie T.

Jazyk k-sortovaného prvního řádu se od jazyka prvního řádu liší tím, že každé z jeho ik a ip je přiřazeno číslo od 1 do k (sort), a že každému z jeho pkn je přiřazena uspořádaná n-tice čísel z množiny {1,...,k} (typ). Predikát typu $<i_1,...,i_n>$ pak tvoří vf jedině s ik sortů $i_1,...,i_n$. (Tak je-li terciální predikát P typu <2,1,2>, je $P(T_1,T_2,T_3)$ dobře utvořená vf právě tehdy, jsou-li T_1 a T_3 sortu 2 a T_2 sortu 1).
Interpretace jazyka k-sortovaného prvního řádu je uspořádaná (k+1)-tice $<U_1,...,U_k,F>$ taková, že $<U_1,...,U_k>$ jsou množiny a F je funkce taková, že $F(x)\in U_i$, je-li x ik sortu i, a $F(x)\subseteq U_{i1}x...xU_{in}$, je-li x pkn typu $<i_1,...,i_n>$.

Jazyk 2. řádu má oproti jazyku 1. řádu navíc pro každé přirozené n predikátové proměnné arity n (ppn), a má vf, které se skládají z kvantifikátoru, predikátové proměnné a vf. *Standardní interpretace jazyka druhého řádu* je uspořádaná dvojice <U,F>, kde U je množina a F je funkce taková, že $F(x)\in U$, je-li x ik, a $F(x)\subseteq U^n$, je-li x pk. *Henkinovská interpretace jazyka druhého řádu* je uspořádaná dvojice <U,P,F>, kde U je množina, P je funkce, která každému přirozenému číslu n přiřazuje podmnožinu n-té Kartézské mocniny U^n, a F je funkce taková, že $F(x)\in U$, je-li x ik, a $F(x)\subseteq P(n)$, je-li x pk.
Axiomy 2.řádu nazveme axiomy 1.řádu plus všechny výroky, které mají tvar A6-A8 (kde *A*,*B* jsou vf, *p* je ppn, $x_1,...,x_n$ jsou ip, A_p je ta vf, která vznikne z *A* nahrazením *p* libovolnou pkn nebo ppn takovou, aby se nestala v A_p vázanou, *C* je vf, ve které není volná proměnná *p*, a *D* je vf jejíž všechny volné proměnné jsou mezi $x_1...x_n$).

$$\forall pA\rightarrow A_p \quad \text{(A6)}$$
$$\forall p(C\rightarrow B)\rightarrow(C\rightarrow\forall pB) \quad \text{(A7)}$$
$$\exists p\forall x_1...x_n(p(x_1...x_n)\leftrightarrow D) \quad \text{(A8)}$$

Odvozovacími pravidly 2. řádu nazveme pravidla MP, Gen a Gen2.

$$\text{z } A \text{ odvoď } \forall pA \quad \text{(Gen2)}$$

Jazyk 2. řádu se nazývá *monadický*, neobsahuje-li žádné pkn a ppn pro n>1. Teorie 2. řádu se nazývá *monadická*, je-li její jazyk monadický.

Jazyk n-tého řádu obsahuje konstanty a proměnné typu t pro každý typ řádu menšího nebo rovného n; kde množina typů je definována následujícím způsobem: ι je typ řádu 0; jsou-li $t_1,...,t_n$ typy, z nichž ten s nejvyšším řádem má řád k, je $<t_1,...,t_n>$ typ řádu k+1. Je-li p konstanta nebo proměnná typu $<t_1,...,t_n>$, pak je $p(x_1,...,x_n)$ vf právě když jsou $x_1,...,x_n$ výrazy po řadě typů $t_1,...,t_n$. Konstanty a proměnné typu ι můžeme nazývat individuálními; konstanty a proměnné jakéhokoli typu řádu k pak můžeme nazývat predikátovými řádu k. *Axiomy n-tého řádu* jsou obdobami axiomů 2. řádu pro řády až po n. *Standardní a henkinovské interpretace jazyka n-tého řádu* jsou analogiemi příslušných interpretací jazyka 2. řádu.

Jazyk (*jednoduché*) *teorie typů* vzniká dalším zobecněním pojmu *typ*, obsahuje konstanty a proměnné typu t pro každý typ definovaný následovně: ι a ο jsou typy; jsou-li $t, t_1, \ldots, t_n$ typy, je i $(t\ t_1 \ldots t_n)$ typ. je-li p výraz typu $(t\ t_1 \ldots t_n)$ a $x_1, \ldots, x_n$ výrazy po řadě typů $t_1, \ldots, t_n$, pak je $p(x_1, \ldots, x_n)$ výrazem typu t. Výrazy typu ι můžeme nazývat individuáními; výrazy typu $(ο\ t_1 \ldots t_n)$ predikátovými; výrazy typu ο jsou vf. *Jazyk dvousortové teorie typů* se od jazyka teorie typů liší tím, že má namísto základního typu ι dva typy, které můžeme označovat jako $ι_1$ a $ι_2$. Jazyk *Tichého intenzionální logiky* je v podstatě jazykem dvousortové teorie typů, kde namísto $ι_1$ a $ι_2$ obvykle používáme symboly ι a ω (a neexistují žádné konstanty typu ω). *Jazyk Montaguovy intenzionální logiky* je v podstatě jazykem jednoduché teorie typů, který ale obsahuje synkategorické symboly ^ a ˅, které spolu s vf dávají vf. Axiomy je možné najít v Peregrin (1992; dodatek).